

Universität Bayreuth

Bachelor Arbeit

Topologischer Transport von
Stahlkugeln über eine gekrümmte
Oberfläche mit
Tetraeder-Symmetrie

vorgelegt von
Adrian Schorr

Lehrstuhl
Experimentalphysik X

Betreut von
Max Pöhlmann Jonas Elschner
Prof. Dr. Thomas M. Fischer
Lehrstuhl für Experimentalphysik X
19 Februar 2026

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der topologische Transport von Stahlkugeln auf einer Kugelschale untersucht. Die geometrische Basis des Versuchsaufbaus bildet ein Tetraeder, der mit seinem Dualkörper überlagert ist. An den acht resultierenden Eckpunkten der Gesamtstruktur sind zylinderförmige Magnete positioniert. Vier dieser Magnete sind radial nach außen und vier radial nach innen magnetisiert.

Die Bewegung der Stahlkugel wird durch die Überlagerung des Pattern-Magnetfeldes mit einem homogenen, adiabatisch veränderten externen Magnetfeld H_{ext} gesteuert. Diese Überlagerung erzeugt ein universelles Potential. Wenn H_{ext} im sogenannten Control Space einen Fence überquert und in eine Region niedrigerer Multiplizität wechselt, wird die aktuelle Position der Kugel instabil. Dies resultiert in einer nicht-adiabatischen Bewegung, dem Ratschensprung, in das nächste verfügbare Maximum.

Im Rahmen des Experiments wurde der Fence im Control Space mithilfe eines Goniometers vermessen. Die Positionen der auftretenden Ratschensprünge wurden auf einem Messschirm markiert, digitalisiert und mit dem theoretisch berechneten Fence verglichen. Die Ergebnisse zeigen für bestimmte Sprungübergänge eine hohe Übereinstimmung mit der Theorie. Beobachtete Abweichungen in anderen Messreihen lassen sich auf dissipative Effekte (Reibung), gravitative Einflüsse sowie Inhomogenitäten des externen Magnetfeldes und höhere Multipolmomente zurückführen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretischer Hintergrund	2
2.1	Action- und Control Space	2
2.2	Stahlkugelpotential	3
2.2.1	Magnetisches Potential	3
2.2.2	Universelles Stahlkugelpotential	3
2.2.3	Berechnung des Gradientenfeldes	4
2.3	Transport	10
2.3.1	Die stationäre Mannigfaltigkeit	10
2.3.2	Der Fence in Action- und Control Space	11
3	Experiment	13
3.1	Versuchsaufbau	13
3.1.1	Konstruktion	13
3.1.2	Goniometer	17
3.2	Versuchsdurchführung	20
3.2.1	Vorbereitungen	20
3.2.2	Messung des Fence	20
4	Auswertung und Diskussion	23
4.1	Messung des Fence im Control Space	23
4.1.1	Digitalisierung der Messdaten	23
4.2	Diskussion von Gravitationseinflüssen	25
	Literaturverzeichnis	26

1. Einleitung

Die Symmetrieeigenschaften platonischer Körper lassen sich gezielt für den topologischen magnetischen Transport von Partikeln nutzen. In dieser Arbeit wird ein System basierend auf der Symmetrie eines Tetraeders und dessen Dualkörpers untersucht. Ein Tetraeder weist spezifische Symmetrieeigenschaften auf, wie beispielsweise dreizählige (C_3) Drehachsen. Durch die Überlagerung mit dem dualen Tetraeder entstehen insgesamt acht markante Eckpunkte der Gesamtstruktur.

Zur Erzeugung eines spezifischen magnetischen Patterns wurden an diesen acht Eckpunkten zylinderförmige Magnete positioniert (vgl. Abbildung 3.6). An den vier Ecken des primären Tetraeders sind die Magnete radial nach außen magnetisiert, während die Magnete an den vier Ecken des Dualkörpers radial nach innen zeigen.

In einem definierten Abstand d zu den Magnetoüberflächen befindet sich eine glatte Acrylschale. Diese Kugelschale beschreibt den Action Space $\mathcal{A}$, auf welchem sich eine paramagnetische Stahlkugel bewegt. Ein homogenes externes Magnetfeld H_{ext} , dessen Orientierung im Control Space $\mathcal{C}$ adiabatisch variiert wird, durchströmt den gesamten Aufbau. Die Überlagerung des Pattern-Magnetfeldes mit dem externen Feld erzeugt ein universelles Potential U , welches die Kraftwirkung auf die Stahlkugel dominiert.

Ziel der Arbeit ist die experimentelle Untersuchung der nicht-adiabatischen Bewegung der Stahlkugel, bekannt als Ratschensprung. Dieser Sprung tritt auf, wenn das externe Magnetfeld im Control Space eine topologische Grenze, den Fence $\mathcal{F}$, überschreitet und in eine Region niedrigerer Multiplizität wechselt. Der resultierende Fence im Control Space wird experimentell vermessen und detailliert mit der theoretischen Vorhersage verglichen.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Action- und Control Space

Wie in Kapitel 1 erwähnt wird die Bewegung von Stahlkugeln auf einer Kugelschale untersucht. Diese Kugelschale hat den Radius $R_A = R_T + d$, wobei R_T der Radius des Tetraeders ist und d der Abstand zwischen dem Tetraeder und der Oberfläche der umschließenden Kugel. Die Kugelschale beschreibt damit den sogenannten Action Space $\mathcal{A}$.

Es gilt

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R_A^2\} \quad (2.1)$$

Dies entspricht einer Kugeloberfläche, deswegen bietet es sich an Kugelkoordinaten zu verwenden also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin(\vartheta) \cos(\phi) \\ \rho \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ \rho \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \rho = R_A \\ \vartheta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad (2.2)$$

Damit kann die Position einer Stahlkugel zu jeder Zeit im Action Space ($\mathcal{A}$) durch einen Vektor $\mathbf{r}_A \in \mathcal{A}$ dargestellt werden. Wobei der Polarwinkel ϑ von der z-Achse zum Vektor $\mathbf{r}_A$ gemessen wird, der Azimutwinkel ϕ wird von der x-Achse zur Projektion des Vektors $\mathbf{r}_A$ auf die x-y-Ebene angegeben. Das extern angelegte Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ durchströmt den Tetraeder komplett und wird als homogen angenommen. Die Zeitabhängigkeit der Veränderung des Magnetfeldes ist aufgrund von adiabatischer Bewegung vernachlässigbar. Bei Veränderung von $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ wird nur die Ausrichtung und nicht der Betrag des Magnetfeldes verändert. Analog zum Action Space $\mathcal{A}$ kann der Control Space $\mathcal{C}$ durch die Winkel ϑ_{ext} und ϕ_{ext} bezüglich des gleichen Koordinatensystems

definiert werden. Damit bilden alle Vektoren $\mathbf{H}_{\text{ext}} \in \mathcal{C}$ eine Kugelschale mit Radius H_{ext} , wobei $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ vom Ursprung nach außen zeigt.

2.2 Stahlkugelpotential

2.2.1 Magnetisches Potential

Das Magnetfeld des Patterns wird nur durch Permanentmagneten erzeugt; somit kann das Feld mit dem magnetischen Skalarpotential ψ beschrieben werden:

$$\mathbf{H}_p = -\nabla\psi \quad (2.3)$$

Aus den Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt die Laplace-Gleichung für ψ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 \Delta\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi = 0 \quad (2.4)$$

da $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ auf $\mathcal{A}$ oder allgemein außerhalb der Magneten gilt. Die Lösung dieser Gleichung bei der gegebenen Symmetrie (führender Term $l = 3$ für Tetraeder-Symmetrie) ist gegeben durch:

$$\psi_3(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}) \propto \frac{MR^4}{r^4} \sum_{i=1}^8 (\pm)_i P_3 \left(\frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r}_{\mathcal{A}}}{r} \right) \quad (2.5)$$

wobei M die Magnetisierung, R der Abstand vom Ursprung zu den Magneten, P_3 das Legendre-Polynom 3. Grades und $\mathbf{f}_i$ die Einheitsvektoren auf die Positionen der acht Magneten sind. Das Vorzeichen $(\pm)_i$ berücksichtigt die Orientierung der Magneten (Tetraeder vs. Dual-Tetraeder). Das Skalarpotential wurde in Abbildung 2.1 dargestellt.

2.2.2 Universelles Stahlkugelpotential

Auf dem Action Space überlagern sich das externe Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ und das Feld des Patterns $\mathbf{H}_p$ (vgl. Abb. 2.2) zum Gesamtfeld $\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_{\text{ext}}$. In der paramagnetischen Stahlkugel wird dadurch ein magnetisches Moment $\mathbf{m}$ induziert:

$$\mathbf{m} = \chi_{\text{eff}} V \mathbf{H} \quad (2.6)$$

wobei V das Volumen der Kugel und $\chi_{\text{eff}} > 0$ die effektive Suszeptibilität beschreibt. Die potentielle Energie der Kugel ergibt sich zu:

$$E_{\text{pot}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H} = -\chi_{\text{eff}} V (H_p^2 + 2\mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} + H_{\text{ext}}^2) \quad (2.7)$$

Da die Bewegung auf der Kugelschale $\mathcal{A}$ stattfindet und $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ homogen ist, ist H_{ext}^2 konstant. Zudem gilt für die Feldstärken $H_p \ll H_{\text{ext}}$, weshalb der quadratische Term H_p^2 vernachlässigt werden kann. Die Kraftwirkung wird somit dominierend durch den Mischterm bestimmt. Das universelle Potential U wird definiert als:

$$U(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{H}_p(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}) \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} = -\nabla\psi_3(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}) \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}} \quad (2.8)$$

Minima in der potentiellen Energie entsprechen somit Maxima im universellen Potential U . Zur Berechnung von U ist der Gradient des magnetischen Potentials ψ_3 notwendig. Unter Verwendung der Gradientenregeln in Kugelkoordinaten ergibt sich für $l = 3$:

$$\nabla\psi_3 \propto -\hat{e}_r \frac{4}{r^5} \sum_{i=1}^8 (\pm)_i P_3 \left(\frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r}_{\mathcal{A}}}{r} \right) + \frac{1}{r^5} \sum_{i=1}^8 (\pm)_i P'_3 \left(\frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r}_{\mathcal{A}}}{r} \right) (f_{i,\vartheta} \hat{e}_\vartheta + f_{i,\varphi} \hat{e}_\varphi) \quad (2.9)$$

Hierbei bezeichnen $f_{i,\vartheta}$ und $f_{i,\varphi}$ die Komponenten der Magnet-Positionsvektoren projiziert auf die Tangentialvektoren der Kugeloberfläche. Eine Herleitung dieses Ausdrucks folgt im nächsten Abschnitt.

2.2.3 Berechnung des Gradientenfeldes

Um das universelle Potential U und die daraus resultierenden Kräfte zu bestimmen, muss der Gradient des magnetischen Skalarpotentials ψ berechnet werden. Das Potential für die Tetraeder-Symmetrie wird in führender Ordnung durch das Multipolmoment $l = 3$ (Oktupol) dominiert und lässt sich schreiben als:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^4} \sum_{i=1}^8 s_i P_3 \left(\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.10)$$

Hierbei sind $\mathbf{p}_i$ die Ortsvektoren der 8 Magneten und $s_i \in \{+1, -1\}$ gibt die Orientierung der Magnetisierung an (Tetraeder vs. Dual-Tetraeder). Zur Berechnung von $\nabla\psi$ wird der Nabla-Operator in Kugelkoordinaten verwendet:

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.11)$$

Angewendet auf das Potential ergibt sich:

$$\nabla\psi \propto \sum_{i=1}^8 s_i \nabla \left(\frac{1}{r^4} P_3(\cos \alpha_i) \right) \quad (2.12)$$

mit dem Winkel $\cos \alpha_i = \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{r}$ zwischen dem Ortsvektor der Kugel und dem i -ten Magneten. Nach der Produktregel gilt:

$$\nabla (r^{-4} P_3) = (\nabla r^{-4}) P_3 + r^{-4} (\nabla P_3) \quad (2.13)$$

Der radiale Anteil ist:

$$\nabla r^{-4} = \frac{\partial}{\partial r} (r^{-4}) \hat{e}_r = -4 \frac{1}{r^5} \hat{e}_r \quad (2.14)$$

Für den Winkelanteil muss die Kettenregel auf das Legendre-Polynom angewendet werden. Sei $u_i = \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{r}$. Dann gilt $\nabla P_3(u_i) = P'_3(u_i) \nabla u_i$. Der Gradient des Arguments u_i berechnet sich unter Verwendung der Identität $\nabla \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{a}}{r} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^3}$ zu:

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} (\mathbf{p}_i - (\mathbf{p}_i \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r) \quad (2.15)$$

Der Term in der Klammer entspricht der Projektion des Magnet-Vektors auf die Tangentialebene der Kugeloberfläche. Zerlegt in die Kugelbasisvektoren $\hat{e}_\vartheta$ und $\hat{e}_\varphi$ ergibt sich:

$$\mathbf{p}_{i,\text{tang}} = (\mathbf{p}_i \cdot \hat{e}_\vartheta) \hat{e}_\vartheta + (\mathbf{p}_i \cdot \hat{e}_\varphi) \hat{e}_\varphi \quad (2.16)$$

Basierend auf diesem theoretischen Ansatz ergibt sich für das Magnetfeld $\mathbf{H}_p = -\nabla\psi_3$ [1]:

$$\nabla\psi_3 \propto - \left[\frac{4}{r^5} \sum_{i=1}^8 (\pm)_i P_3 \left(\frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r}_A}{r} \right) \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r^5} \sum_{i=1}^8 (\pm)_i P'_3 \left(\frac{\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r}_A}{r} \right) (f_{i,\vartheta} \hat{e}_\vartheta + f_{i,\varphi} \hat{e}_\varphi) \quad (2.17)$$

Dieser Ausdruck beschreibt exakt die Vektorkomponenten des Pattern-Magnetfeldes, das für die Berechnung des universellen Potentials $U = -\nabla\psi \cdot \mathbf{H}_{\text{ext}}$ benötigt wird. Verschiedene Darstellungen von U, bei unterschiedlichen Einstellungen des externen Magnetfeldes sind in den Abbildungen 2.3, 2.4 und 2.5.

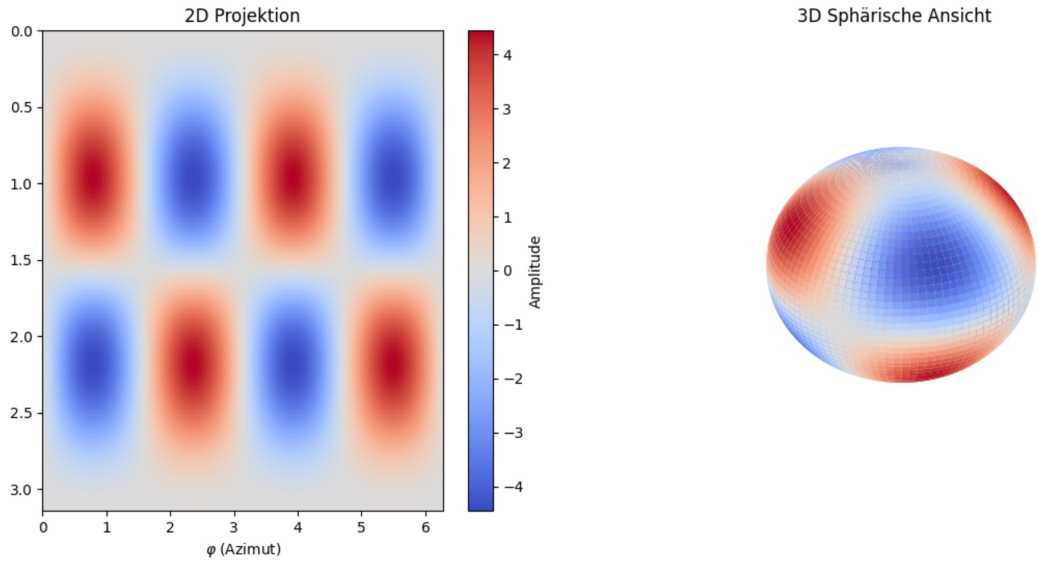


Abbildung 2.1: Darstellung des Skalarpotentials.

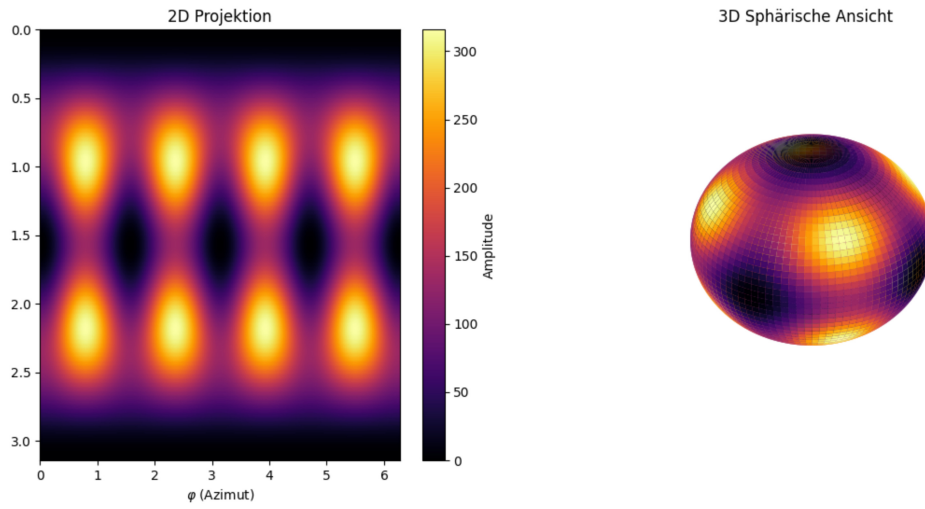


Abbildung 2.2: Darstellung von H_p^2

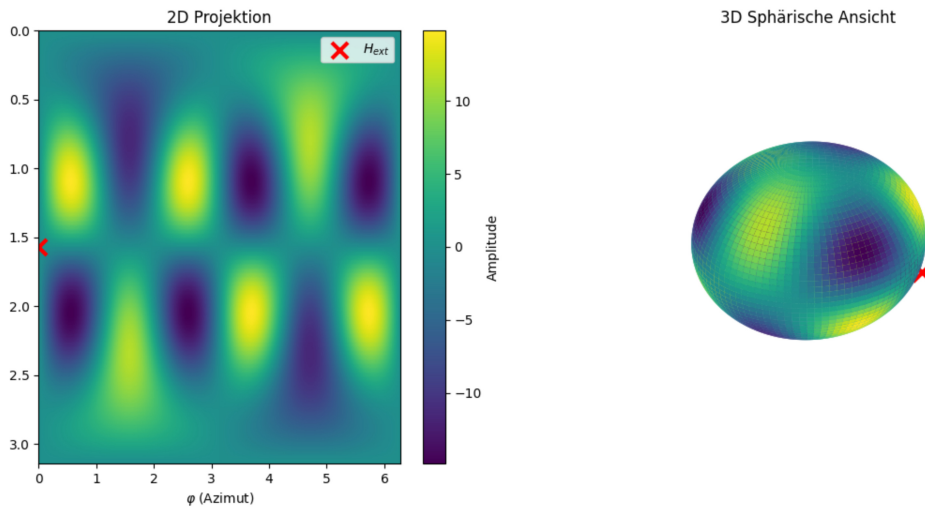


Abbildung 2.3: Universelles Potential bei einer Ausrichtung des externen Magnetfeldes entlang einer C_2 Achse.

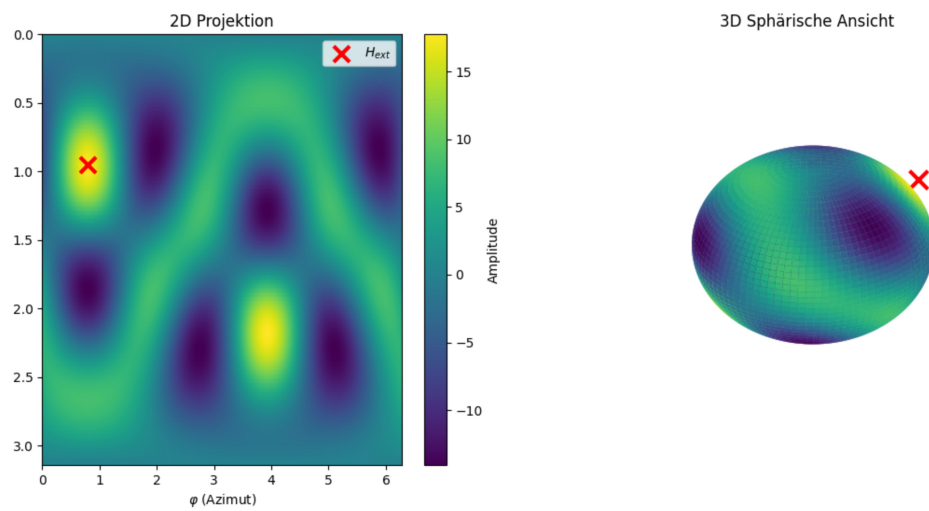


Abbildung 2.4: Universelles Potential bei einer Ausrichtung des externen Magnetfeldes entlang einer C_3 Achse, mit gleich gesinnter magnetischen Ausrichtung der Patternmagneten.

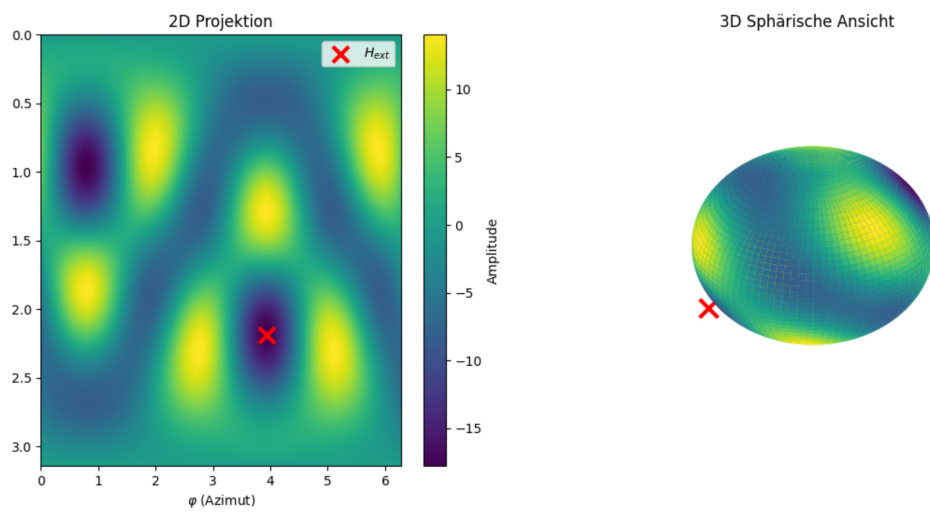


Abbildung 2.5: Universelles Potential bei einer Ausrichtung des externen Magnetfeldes entlang einer C_3 Achse, mit entgegengesetzter magnetischen Ausrichtung der Patternmagneten.

2.3 Transport

2.3.1 Die stationäre Mannigfaltigkeit

Da das externe Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ adiabatisch verändert wird, befindet sich die Stahlkugel zu jedem Zeitpunkt in einem lokalen Minimum der potentiellen Energie E_{pot} bzw. einem lokalen Maximum des universellen Potentials U . Die Bewegung kann daher vollständig durch die Betrachtung der stationären Punkte von U beschrieben werden. Die stationäre Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist definiert als die Menge aller Punkte im Produktraum aus Action- und Control Space, für die der Gradient des Potentials verschwindet:

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}, \mathbf{H}_{\text{ext}}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \nabla_{\mathcal{A}} U = 0\} \quad (2.18)$$

Diese Mannigfaltigkeit enthält nicht nur die Maxima (stabile Positionen der Kugel), sondern auch Minima und Sattelpunkte. $\mathcal{M}$ lässt sich zerlegen in:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_{\pm} \cup \mathcal{F} \quad (2.19)$$

wobei $\mathcal{M}_+$ die Maxima, $\mathcal{M}_-$ die Minima und $\mathcal{M}_{\pm}$ die Sattelpunkte beschreibt. Die Grenzen zwischen diesen Bereichen werden als *Fence* $\mathcal{F}$ bezeichnet. Zur mathematischen Klassifizierung wird die Hesse-Matrix $H[U]$ von U herangezogen. Damit sind die Untermannigfaltigkeiten definiert als:

$$\mathcal{M}_+ = \{(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}, \mathbf{H}_{\text{ext}}) \in \mathcal{M} \mid \det(H[U]) > 0 \wedge \text{tr}(H[U]) < 0\} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{M}_- = \{(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}, \mathbf{H}_{\text{ext}}) \in \mathcal{M} \mid \det(H[U]) > 0 \wedge \text{tr}(H[U]) > 0\} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{M}_{\pm} = \{(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}, \mathbf{H}_{\text{ext}}) \in \mathcal{M} \mid \det(H[U]) < 0\} \quad (2.22)$$

Der Fence $\mathcal{F}$ ist die Menge der Punkte, an denen die Determinante der Hesse-Matrix verschwindet:

$$\mathcal{F} = \{(\mathbf{r}_{\mathcal{A}}, \mathbf{H}_{\text{ext}}) \in \mathcal{M} \mid \det(H[U]) = 0\} \quad (2.23)$$

Anschaulich entspricht der Fence den Übergängen, an denen ein Extremum instabil wird und sich mit einem Sattelpunkt vernichtet (Bifurkation). Dies ist der Auslöser für die nicht-adiabatische Bewegung der Stahlkugel (Ratenschensprung).

2.3.2 Der Fence in Action- und Control Space

Durch die Projektion der stationären Punkte zurück auf den Action Space $\mathcal{A}$ oder den Control Space $\mathcal{C}$ entstehen charakteristische Strukturen. Die Projektion des Fences $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ unterteilt die Kugeloberfläche in verschiedene Regionen. Diese Regionen spiegeln die Symmetrie des zugrundeliegenden Tetraeder-Patterns wider. Der Action Space wird hier durch die Symmetrieachsen des Tetraeders (bzw. des umschreibenden Würfels) strukturiert.

Die Regionen lassen sich in zwei Kategorien einteilen:

- **Allowed Regions:** Bereiche, in denen stabile Maxima existieren. Hier kann sich die Stahlkugel aufhalten (vgl. Abb. 2.6). Diese liegen typischerweise über den Magneten (Ecken und Flächen des Tetraeders).
- **Forbidden Regions:** Bereiche, in denen nur Sattelpunkte existieren. Die Kugel kann sich hier nicht stabil aufhalten. Diese entsprechen den Kantenregionen zwischen den Magneten.

Analog unterteilt die Projektion $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ den Control Space in Regionen unterschiedlicher Multiplizität m . Die Multiplizität gibt an, wie viele stabile Maxima (und damit mögliche Kugelpositionen) für eine gegebene Richtung des externen Magnetfeldes $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ existieren. Ein nicht-adiabatischer Transport der Kugel, ein sogenannter Ratschensprung, findet genau dann statt, wenn $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ im Control Space einen Fence überquert und von einer Region höherer Multiplizität in eine Region niedrigerer Multiplizität wechselt. Dabei wird das aktuelle Maximum, in dem die Kugel sitzt, instabil und die Kugel springt in das nächste verfügbare Maximum einer benachbarten *Allowed Region*.

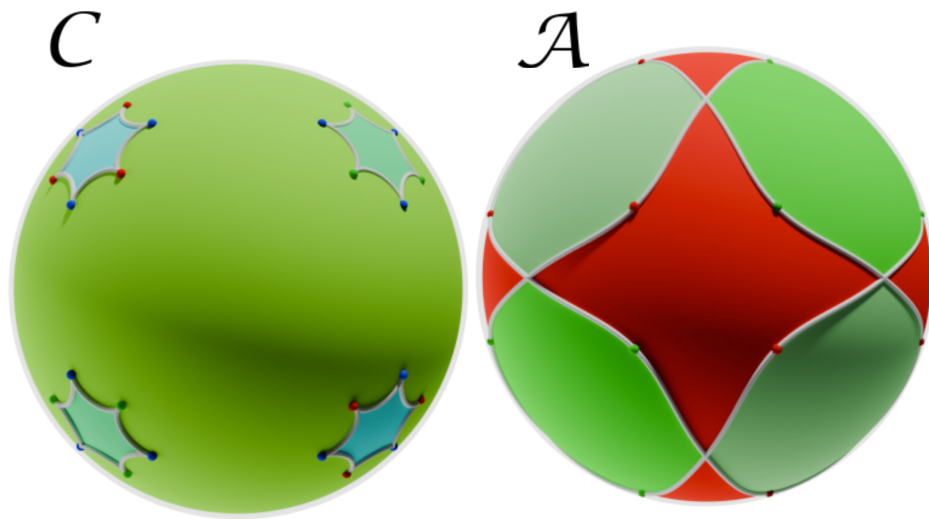


Abbildung 2.6: Darstellung des Control Space (links) und des Action Space (rechts). Im Control Space sind die sternförmigen Regionen die Fences; innen liegen Regionen höherer Multiplizität. Beim Action Space sind die Forbidden Regions rot markiert und die Allowed Regions grün.

3. Experiment

3.1 Versuchsaufbau

3.1.1 Konstruktion

Die geometrische Basis der Konstruktion bildet ein Tetraeder (vgl. Abbildung 3.1a), der mit seinem Dualkörper überlagert wurde (vgl. Abbildung 3.1b). An den daraus resultierenden acht Eckpunkten der Gesamtstruktur, vier Ecken des Tetraeders und vier Ecken des Dualkörpers, wurden zylinderförmige Magnete so positioniert, dass ihre Symmetrieachsen radial auf den Koordinatenursprung zeigen (vgl. Abbildung 3.1c).

Basierend auf dieser Magnetanordnung wurde ein innerer kugelförmiger Trägerkörper mit dem Radius R_T entworfen, welcher über passgenaue zylindrische Aussparungen für die Magnete verfügt. Für die Montage wurde dieser Körper in zwei Halbschalen zerlegt, wobei in die Schnittflächen Bohrungen für PVC-Verbindungselemente integriert wurden, um die Hälften exakt zusammenzufügen.

Zur Fixierung der Magnete (in Abb. 3.3 ohne Fixierung) wurde eine äußere Arretierungsschale konstruiert, die den inneren Körper formschlüssig umschließt und die Magnete in ihrer Position hält. Die Struktur dieser Schale ist so gestaltet, dass sie gleichzeitig die geometrischen Grenzen der „Forbidden Regions“ auf der Oberfläche abbildet.

Um die Reibung für den Transportprozess zu minimieren, wird der gesamte Aufbau abschließend von einer glatten Acrylschale umschlossen. Der Gesamtdurchmesser der Konstruktion beträgt $D = 2(R_T + d)$, wobei d den definierten Abstand zwischen den Magnetoberflächen und den auf der Acrylschale platzierten Stahlkugeln beschreibt.

Um die Größen R_T und d zu bestimmen wurden mehrere Konstruktionen angefertigt. Eine Limitation ergab sich aus den vorgegebenen Durchmessern

der kommerziell erhältlichen Acrylschalen. Bei größeren Durchmessern als 5 cm war es nicht möglich Stahlkugeln an der Kugel haften zu lassen unter Verwendung der stärksten Magnete. Um höhere Moden als in Gleichung 2.5 zu unterdrücken, muss der Abstand d der Magnete zur Acrylschale möglichst groß gewählt werden. Dementsprechend wurde R_T minimiert, dabei gibt es eine weitere Limitation, da sich die Magnete möglichst nicht berühren sollen. So wurde $R_T = 1.9$ cm und $d = 0.6$ cm gewählt.

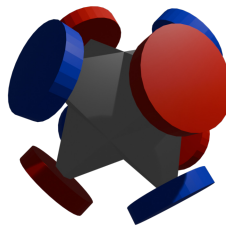
Um die verschiedenen Regionen zu unterscheiden auf denen sich die Stahlkugeln befinden können, werden die einzelnen Magnete nummeriert, dabei haben radial nach außen gerichtete Magnete ein positives und nach innen gerichtete Magnete ein negatives Vorzeichen erhalten. Die Nummerierung kann in Abbildung 3.6 abgelesen werden.



(a) Darstellung eines Tetraeders

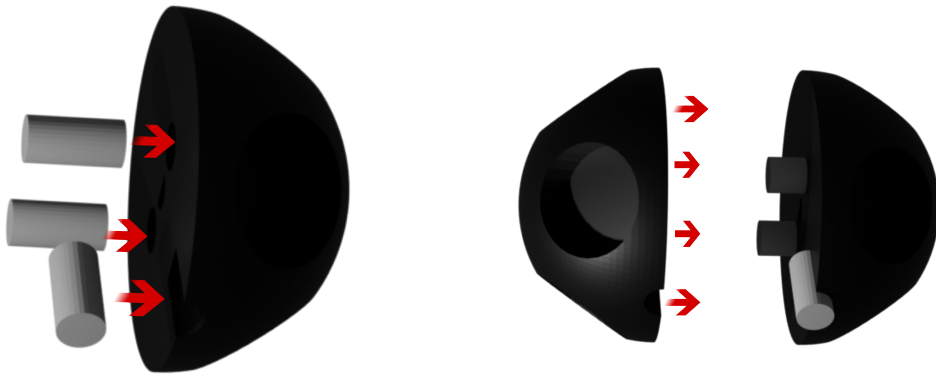


(b) Tetraeder (rot) und Dualkörper (blau)



(c) Magnetplatzierung an Eckpunkten

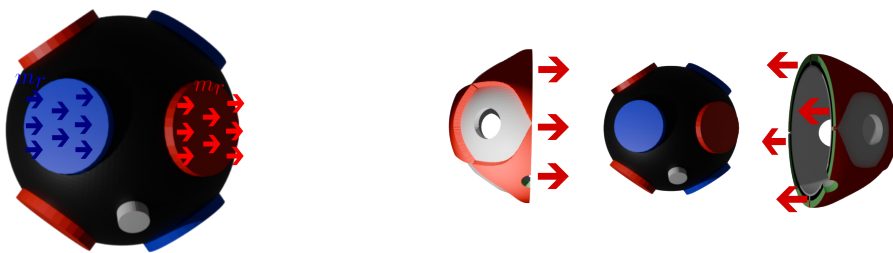
Abbildung 3.1: (a) Darstellung eines Tetraeders. (b) Darstellung des Tetraeders (rot) und des zugehörigen Dualkörpers (blau). (c) Tetraeder und Dualkörper mit den jeweiligen Magneten an den Eckpunkten; rote Magnete sind radial nach außen magnetisiert, blaue nach innen.



(a) Halbkugel mit Einlässen für PVC-Stäben, diese dienen zur Befestigung und Orientierung der anderen Bauteile.

(b) Zusammensetzung der zwei Halbkugeln.

Abbildung 3.2: (a) Halbkugel mit PVC-Stäben. (b) Zusammensetzung der zwei Halbkugeln.



(a)

(b)

Abbildung 3.3: (a) Die zusammengefügtten Halbkugeln mit den Magnete, rote Magnete sind radial nach außen und blaue Magnete nach innen ausgerichtet. , (b) Zusammensetzung der Arretierungsschalen.

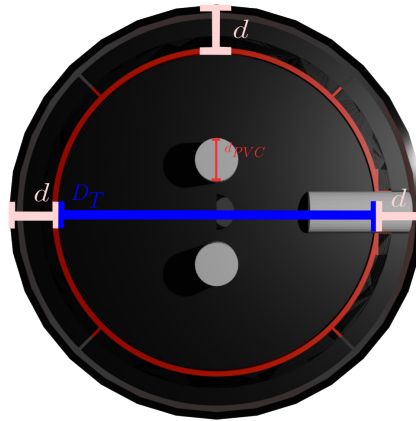


Abbildung 3.4: Im Querschnitt der Konstruktion sind die Größen des Abstandes d , des Durchmessers D_T des Tetraeders und D_{PVC} der PVC Stäbe eingezeichnet.



Abbildung 3.5: Die fertige Konstruktion mit Acrylschale

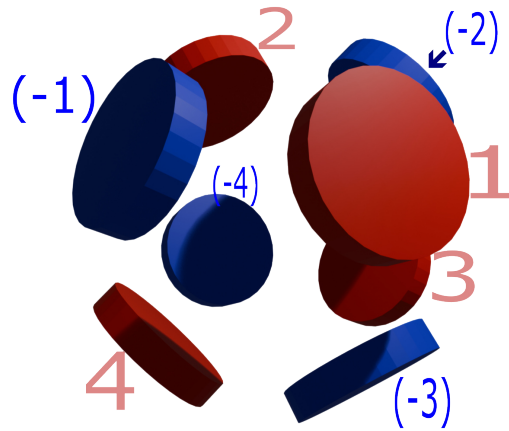


Abbildung 3.6: Nummerierung der Magnete aus Abbildung 3.1c.

3.1.2 Goniometer

Um die Ausrichtung des externen Magnetfeldes $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ relativ zum Tetraeder präzise zu steuern, während die Stahlkugel auf dem Objekt verbleibt, wurde ein Goniometer verwendet. Die Konstruktion ist in Abbildung 3.7 als Modell und in Abbildung 3.8 im realen Versuchsaufbau dargestellt.

Die zwei externen zylinderförmigen Magnete, die das homogene Feld erzeugen, sind auf einem Aluminiumring befestigt und können auf diesem gedreht werden, sodass die Zylinderachsen gleich ausgerichtet sind. Der Ring selbst ist um einen Messingstab rotierbar, auf dem der Tetraeder mit den acht Magneten fixiert ist. Die Spitze des Messingstabs ist im Ursprung der konstruierten Kugel und die Zylinderachsen der externen Magnete laufen bei jeder Einstellung des externen Magnetfeldes durch diesen Ursprungspunkt. Der Messingstab hält den Tetraeder in einer festen Position im Zentrum des Aufbaus.

Zur Bestimmung der exakten Ausrichtung von $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ ist auf der Rückseite der Magnethalterung ein Laser montiert, der parallel zum Feldvektor ausgerichtet ist. Die Position des Lasers auf dem Messschirm (x, z) kann in die Kugelkoordinaten des Control Space $(\vartheta_{\text{ext}}, \varphi_{\text{ext}})$ transformiert werden (vgl. Abbildung 3.9). So können Ausrichtungen von $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ die von Interesse sind auf dem Messschirm markiert werden.

Unter der Annahme, dass der Laser senkrecht auf den Aufpunkt $(0, L, 0)$ trifft, ergibt sich die Transformation zu:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_{ext} \\ \varphi_{ext} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_0 - \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{L^2+x^2}}\right) \\ \varphi_0 - \arctan\left(\frac{x}{L}\right) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dabei ist L der Abstand vom Tetraedermittelpunkt zum Messschirm ($L = 0,609m$) und (ϑ_0, φ_0) sind die Winkelkoordinaten des Nullpunkts. Alternativ kann auch verwendet werden, dass die Achse des Laserstrahls durch den Ursprung verläuft und somit der Messpunkt an der Stelle (x, L, z) durch Normierung auf der Einheitskugel liegt, sodass dieser auf den berechneten Controlspace projiziert werden kann.

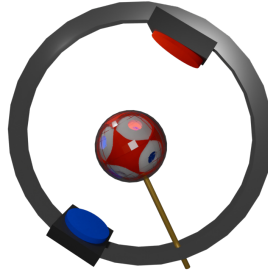


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung der Goniometer-Konstruktion. Der abgerundete Tetraeder befindet sich im Zentrum des Aluminiumrings.

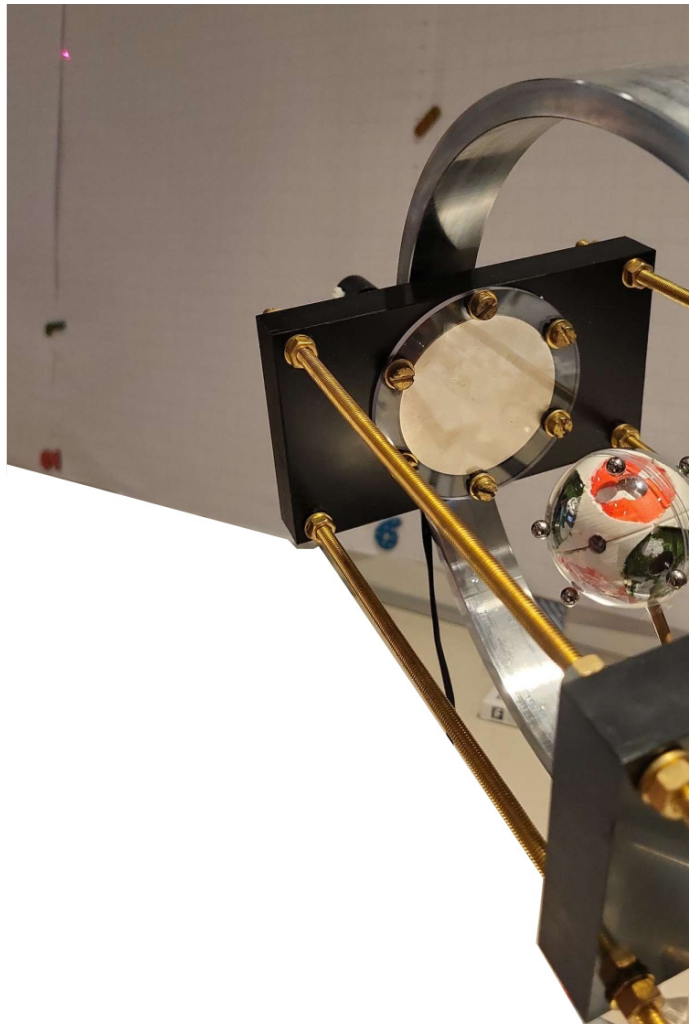


Abbildung 3.8: Der vollständige experimentelle Aufbau mit Goniometer, Laser und Messschirm.

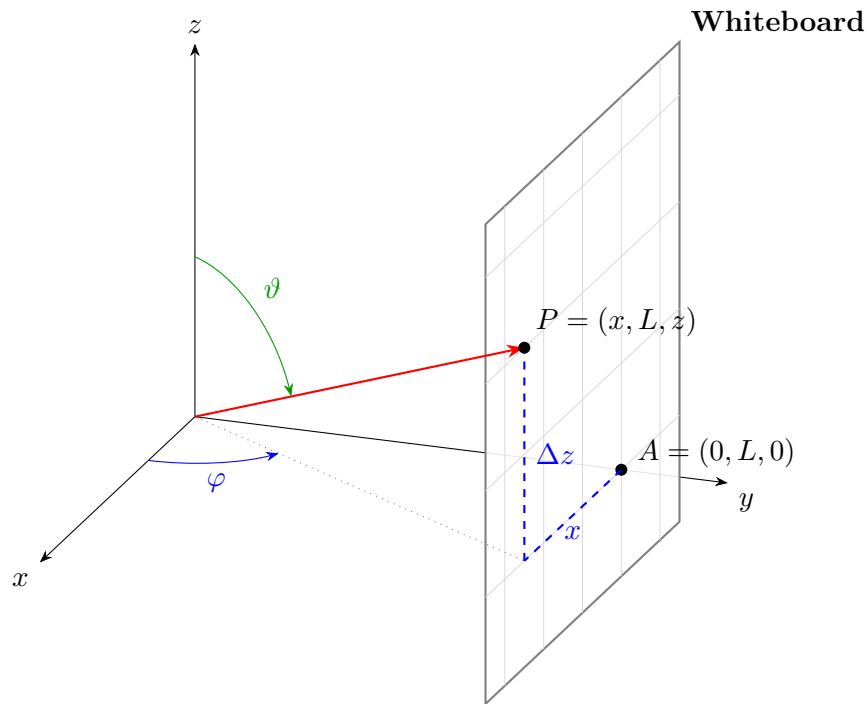


Abbildung 3.9: Geometrie der Koordinatentransformation.

3.2 Versuchsdurchführung

3.2.1 Vorbereitungen

Um eine Umrechnung der Koordinaten zu ermöglichen, wird das Goniometer zunächst so justiert, dass der Laserstrahl senkrecht auf den Messschirm trifft. Dieser Auftreffpunkt wird als Referenznullpunkt markiert.

Anschließend werden Stahlkugeln mit einem Durchmesser von 5 mm auf der Konstruktion platziert. Dies liegt daran, dass kleinere Kugeln zu stark von den Patternmagneten angezogen werden, während größere nicht an der Konstruktion haften. Es zeigte sich, dass acht Stahlkugeln stabil positioniert werden können, wenn das externe Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ entlang einer C_3 -Achse ausgerichtet ist. Diese Ausrichtung dient als Startpunkt und wird auf dem Messschirm gekennzeichnet.

3.2.2 Messung des Fence

Die Vermessung des Fence folgt einem systematischen Ablauf. Ausgehend von der markierten C_3 -Ausrichtung (Startpunkt) wird $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ entlang radialer

Pfade auf dem Messschirm adiabatisch verändert.

Sobald ein Ratschensprung auftritt, bei dem eine Stahlkugel aus ihrer aktuellen Region in eine Region niedrigerer Multiplizität wechselt, werden sowohl die Start- als auch die Zielregion notiert. Dem radialen Pfad wird weiter gefolgt, bis ein zweiter Ratschensprung einer anderen Stahlkugel in eine Region geringerer Multiplizität erfolgt. Um magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkungen zwischen den Stahlkugeln zu verhindern, werden die Kugeln nach Identifikation der Sprungpfade aus den Zielregionen entfernt.

Für die eigentliche Messung wird $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ erneut vom Startpunkt aus radial bewegt. Die Position der Ausrichtung von $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ auf dem Messschirm im Moment des Ratschensprungs wird markiert. Unterschiedliche Sprungtypen werden dabei durch verschiedene Symbole oder Farben differenziert. Dieses Vorgehen wird für fein abgestufte radiale Pfade wiederholt, bis der relevante Bereich des Messschirms vollständig rasterartig abgefahren ist. Tritt ein neuer Sprungtyp auf, werden dessen Start- und Zielregionen gesondert protokolliert.

Ausgehend von der C_3 -Region die durch den Magneten (+3) verläuft wurden die Messungen durchgeführt. Es konnten mehrere Sprünge beobachtet (vgl. Tabelle 3.1) und auf dem Messschirm markiert werden (vgl. Abbildung 3.10)

Tabelle 3.1: Übersicht der gemessenen Ratschensprünge für verschiedene Magnetfeldausrichtungen.

Farbe	Symbol	Sprünge
Blau	Kreis (o)	(+1) $\rightarrow$ (-3)
Blau	Kreuz ($\times$)	(-4) $\rightarrow$ (+4)
Rot	Kreis (o)	(+1) $\rightarrow$ (-1)
Orange	Kreis (o)	(-1) $\rightarrow$ (+2)

Bei der Messung war die Messung des Ratschensprungs der Region (-4) auf (+4) schwierig, da es nicht zu einen eindeutigen Wechsel zwischen den Regionen kam sondern zu kleinen Sprüngen. Dabei oblag der Messperson ein gewisser Entscheidungsspielraum ab wann ein klarer Wechsel der Regionen stattfand. Auf diese Messreihe wird im folgenden Kapitel besonders eingegangen.

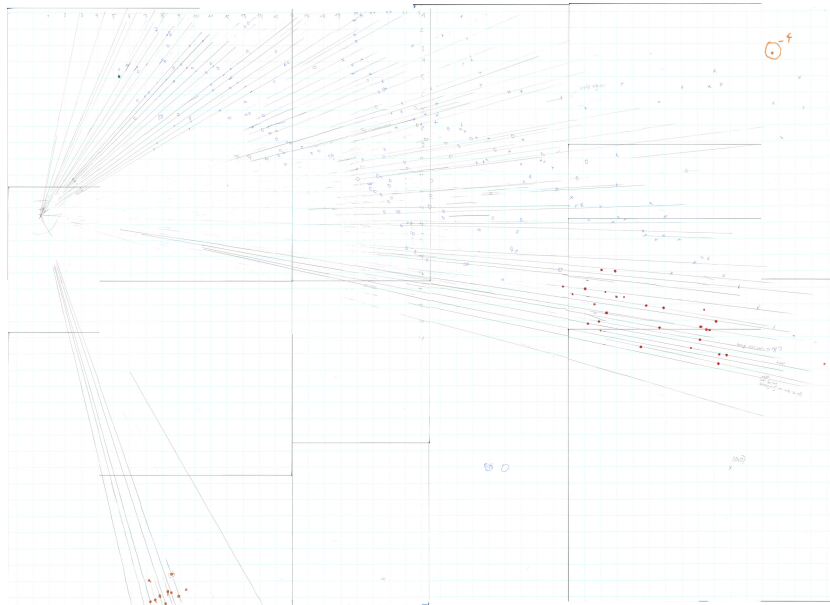


Abbildung 3.10: Der gescannte und zusammengefügte Messschirm.

4. Auswertung und Diskussion

4.1 Messung des Fence im Control Space

4.1.1 Digitalisierung der Messdaten

Wie in Kapitel 3 dargelegt, wurden die Ratschensprünge auf dem Messschirm markiert. Der Messschirm, bestehend aus mehreren karierten Papiersegmenten, wurde gescannt und digitalisiert. Anschließend wurden die Einzelbilder mittels der Software *Fiji: ImageJ* zu einer Gesamtaufnahme zusammengesetzt.

Im verwendeten Koordinatensystem des Bildes entspricht der Ursprung (0 px, 0 px) der oberen linken Ecke. Die Gitterlinien des Papiers weisen eine Kantenlänge von 2.5 cm auf, was im Digitalisat 100 px entspricht. Der Referenzpunkt (Nullpunkt der Projektion), an dem die Normale vom Tetraeder-Ursprung auf den Schirm trifft, wurde bei den Pixelkoordinaten (13 154 px, 8451 px) ermittelt. Der Abstand vom Tetraeder zum Schirm beträgt L entlang der y-Achse.

Die Transformation der Pixelkoordinaten (P_x, P_y) in physikalische Ortskoordinaten (x, z) auf dem Schirm erfolgt über:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x - 13\,154 \text{ px} \\ P_y - 8451 \text{ px} \end{pmatrix} \cdot \frac{25 \times 10^{-3} \text{ m}}{100 \text{ px}} \quad (4.1)$$

Dabei ist die y-Koordinate durch den Schirmabstand L fest vorgegeben. Zur Überführung in den sphärischen *Control Space* $\mathcal{C}$ werden die Vektoren normiert:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + L^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ L \\ z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Die resultierende Verteilung der Messpunkte im Vergleich zum theoretisch berechneten Fence ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Es zeigt sich, dass die dunkelblauen Messpunkte (Sprungübergang $(-4) \rightarrow (+4)$) eine hohe Übereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf des Fence aufweisen. Hingegen zeigen die roten und orangen Messreihen signifikante Abweichungen von der theoretischen Vorhersage. Mögliche Ursachen hierfür sind dissipative Effekte (Reibung), der Einfluss der Gravitation sowie Inhomogenitäten des externen Magnetfeldes $\mathbf{H}_{\text{ext}}$, da dieses das Probenvolumen experimentell bedingt nicht ideal homogen durchdringt. Zudem können Multipolmomente höherer Ordnung im magnetischen Potential des Tetraeder-Patterns, die in der idealisierten Theorie vernachlässigt wurden, zu Verzerrungen führen.

Die hellblaue Messreihe lässt zwar eine Tendenz zum theoretischen Fence erkennen, weist jedoch eine starke Streuung auf. Diese Messpunkte korrespondieren ebenfalls mit Sprüngen der Region $(-4) \rightarrow (+4)$, befinden sich jedoch geometrisch unterhalb des Äquators ($z < 0$). Dies legt die Vermutung nahe, dass in diesem Bereich der Einfluss der Gravitation dominant gegenüber den magnetischen Kräften wird.

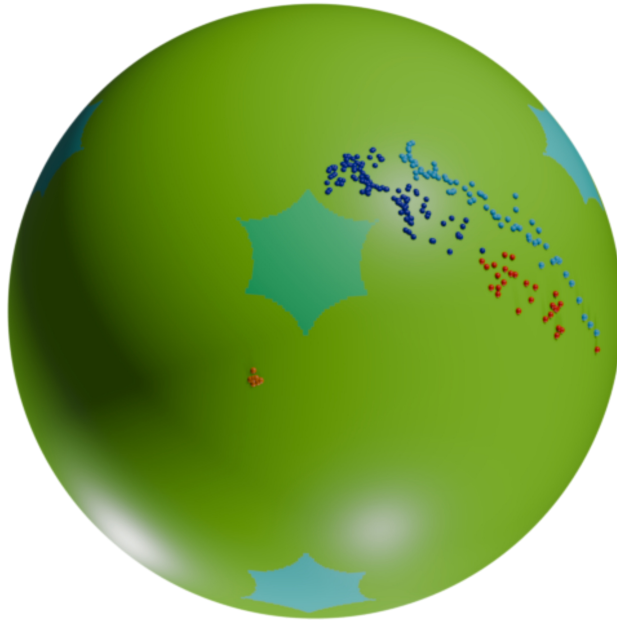


Abbildung 4.1: Digitalisierte Darstellung des Messschirms mit den transformierten Sprungpositionen im Vergleich zum theoretischen Fence.

4.2 Diskussion von Gravitationseinflüssen

Zur Quantifizierung des Gravitationseinflusses auf die Sprungdynamik wird ein geometrischer Kopplungsparameter p_i eingeführt. Dieser ist definiert als der Betrag des Spatprodukts aus dem normierten Gravitationsvektor $\hat{\mathbf{g}}$, der Richtung des externen Feldes $\hat{\mathbf{H}}_{\text{ext}}$ und der radialen Position $\hat{\mathbf{r}}$:

$$p_i = \left| -\hat{\mathbf{g}} \cdot (\hat{\mathbf{H}}_{\text{ext},i} \times \hat{\mathbf{r}}) \right|, \quad p_i \in [0, 1] \quad (4.3)$$

Dieser Parameter beschreibt die Orthogonalität der Gravitation zur durch Magnetfeld und Position aufgespannten Ebene. In Abbildung 4.2 sind die berechneten p -Werte für die verschiedenen Messreihen aufgetragen. Auffällig ist, dass die hellblauen Messpunkte systematisch niedrige p -Werte aufweisen. Dies deutet darauf hin, dass bei diesen Sprüngen die Gravitation geometrisch bedingt einen geringeren direkten Einfluss auf die Instabilität hat, was im Widerspruch zur hohen Streuung zu stehen scheint und auf komplexere Wechselwirkungen oder eine höhere Sensitivität des Potentials in dieser Region hindeutet.

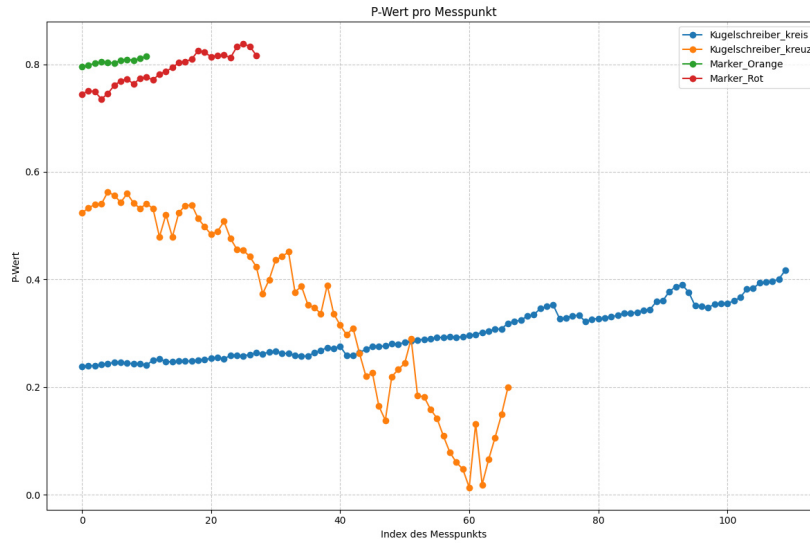


Abbildung 4.2: Korrelation des geometrischen Parameters p mit den Indizes der Messpunkte.

Literaturverzeichnis

- [1] Johannes Loehr u. a.: Lattice symmetries and the topologically protected transport of colloidal particles. In: *Soft Matter* 13 (2017), S. 5044–5075.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit habe ich in gleicher oder ähnlicher Form nicht bereits zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.